Analyse Complexe
TD 7
Fonctions entières

Exercice 1

1. Soit D le disque unité ouvert. Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $D \setminus \{0\}$ telle que
$$\sum_{n\geq 1}(1-|z_n|) < +\infty.$$
Montrer que la formule
$$f(z) = \prod_{n\geq 1} \frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n - z}{1-\overline{z_n}z}$$
définit une fonction holomorphe bornée sur D, dont on précisera les zéros.
2. Réciproquement, montrer que si f est une fonction holomorphe bornée non identiquement nulle sur le disque unité ouvert D, et si $(z_n)_n$ désigne la suite des zéros de f, alors la série
$$\sum_{n}(1-|z_n|)$$
converge.
3. On note $U = \{z, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Montrer que si f est holomorphe bornée sur U et s'annule en $z_1, z_2, \ldots$ avec $\inf |z_n| > 0$ et $\sum_n \mathrm{Re}(1/z_n) = +\infty$, alors f est nulle.
On pourra considérer l'homographie $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$. Le résultat de cette question avait été utilisé dans l'exercice 3 du TD 4.

Exercice 2 (*) Soit f une fonction entière tele que
$$|f(z)| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}(z)|},$$
pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que f est nulle.

Exercice 3 (*) Soit $P = a_nX^n + \ldots + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 1$. On note $S(P) = |a_0| + \ldots + |a_n|$. Montrer que
$$\log(S(P)) \leq n\log 2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(e^{i\theta})|d\theta.$$
En déduire que si $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{C}[X]$ sont des polynômes de degré d_i,
$$\prod_{i=1}^{r} S(P_i) \leq 2^{d_1+\ldots d_r} S(\prod_{i=1}^{r} P_i).$$

Exercice 4 Montrer qu'il existe une unique suite $(B_k)_{k\geq 0}$ de nombres complexes telle que pour tout $z \in D(0, 2\pi)$,
$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} z^k$$

On les appelle les nombres de Bernoulli. Montrer qu'ils sont rationnels en donnant une formule permettant de les calculer par récurrence. En développant en série entière autour de 0 la fonction $z \mapsto \pi \cot(\pi z) - 1/z$, montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$\zeta(2k) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}.$$

Calculer en particulier $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6)$.

Exercice 5

1. Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite injective de complexes telle que $|z_n| \to +\infty$. Soit également $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite de polynômes à coefficients complexes. En développant en série entière $z \mapsto P_n(1/(z - z_n))$ sur $D(0, |z_n|)$, montrer qu'il existe une suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ de polynômes telle que la série de fonctions
$$z \mapsto \sum_n P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right) - Q_n(z)$$
converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \{z_n,\ n \geq 1\}$.
2. En déduire que si l'on se donne une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ comme ci-dessus, des entiers $d_n \geq 1$ et des complexes $a_{n,0}, \ldots, a_{n,d_n}$ pour chaque $n \geq 1$, alors il existe $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que pour tout $n \geq 1$ et tout $0 \leq k \leq d_n$,
$$h^{(k)}(z_n) = a_{n,k}.$$
3. Soient $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ n'ayant pas de zéro commun. Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telles que $f + h_1 g = e^{h_2}$.
4. Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que
$$f_1\mathcal{O}(\mathbb{C}) + \ldots + f_n\mathcal{O}(\mathbb{C}) = h\mathcal{O}(\mathbb{C})$$
où
$$f_1\mathcal{O}(\mathbb{C}) + \ldots + f_n\mathcal{O}(\mathbb{C}) := \{u_1 f_1 + \ldots + u_n f_n \mid u_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\}.$$
On dit que $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ est un *anneau de Bézout.*
5. Donner un exemple de famille $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que
$$\{u_1 f_1 + \ldots + u_r f_r \mid r \geq 1,\ \forall k\ u_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\}$$
ne soit pas de la forme $h\mathcal{O}(\mathbb{C})$, avec $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Exercice 6 Soit (a_n) une suite de nombres complexes avec $|a_n| \to +\infty$. Montrer qu'il existe une fonction entière $\sum b_k z^k$ s'annulant exactement en les a_n, avec $b_k \in \mathbf{Q}(i)$ pour tout k. Montrer que si les a_n sont réels, on peut même choisir les b_k dans $\mathbf{Q}$.

Exercice 7 Les deux questions sont indépendantes.

1. Démontrer le petit théorème de Picard (cf. TD 5) pour les fonctions entières d'ordre fini.
2. Quels sont les polynômes P tels que l'équation $\exp(z) - P(z) = 0$ ait une infinité de zéros ?

Exercice 8 Soit f une fonction entière non constante dont tous les zéros sont réels, telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, et dont l'ordre est strictement inférieur à 2. En considérant $\mathrm{Im}(f'/f)$, montrer que tous les zéros de f' sont réels.